**Équation de Degasperis-Procesi**

Utilisée pour la modélisation des vagues, cette équation s’écrit

(1)

Cette équation a la particularité de posséder des peakons parmi ses solutions. Un peakon est un soliton dont la dérivée première est discontinue. En voici un exemple :

(2)

(2) est donc une solution analytique de (1).

On demande d’écrire le programme de simulation qui permet de visualiser la solution numérique de (1) en fonction de pour des valeurs de  avec  et . La condition initiale et les conditions aux limites de type Dirichlet seront déduites de la solution analytique (2) prise avec .

Un paramètre fondamental au bon fonctionnement du programme est la définition du domaine spatial. Celui-ci sera donc établi par tâtonnements.

L’élaboration de ce simulateur sera menée en utilisant les outils les plus simples : ode45, schémas de différences finies simples, nombre de points de grille suffisant. En particulier on élaborera un programme de calcul de dérivée troisième et on comparera les simulations obtenues avec ce programme et la technique « stagewise ». Le bon fonctionnement du simulateur sera évalué en comparant graphiquement la solution analytique et la solution numérique.

Dès que le simulateur fonctionne, on modifiera les outils utilisés : schémas de différences finies, intégrateur temporel, valeurs de et , étendue du domaine spatial d’étude, … de manière à sélectionner un simulateur optimal en termes de temps de calcul et de précision (on peut par exemple visualiser la quantité en fonction de pour toutes les valeurs de . En particulier, lors de l’étude de l’influence du choix de l’intégrateur temporel, on testera l’impact de l’utilisation de l’option quand elle est disponible.

Une manière rigoureuse de vérifier la qualité de la simulation est de vérifier, quand ils existent, la permanence d’invariants. C’est le cas pour cet essai : on peut montrer que de la solution est un invariant indépendant de . On demande de vérifier cette propriété sur la solution numérique obtenue. On procédera de la manière suivante : on calculera d’abord analytiquement ce que vaut cette quantité sur la condition initiale : soit cette quantité. Ensuite, à l’aide de la formule des trapèzes, on calculera numériquement cette même quantité (appelée ci-après sur la condition initiale (la comparaison avec donnera une idée de la précision que la formule des trapèzes permet d’atteindre dans ce cas) et sur les solutions numériques obtenues . La qualité de la solution numérique sera mesurée en calculant exprimée en pourcents de .

On programmera ensuite la simulation de l’équation (1) alimentée par la condition initiale suivante :

avec ; ; ;

On visualisera la solution numérique de (1) en fonction de pour des valeurs de  avec  et . Par souci de clarté de la visualisation, les profils obtenus seront représentés sur des figures différentes. A nouveau le domaine spatial sera fixé par tâtonnements.

On testera aussi sur cet essai l’existence éventuelle de l’invariant  de la même manière que celle de l’essai précédent.